

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Solução Numérica Computacional de Escoamentos Generalizados**

Tomás Leão Ursi

São Paulo  
2017

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Solução Numérica Computacional de Escoamentos Generalizados**

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da Escola  
Politécnica para obtenção do diploma de  
Engenheiro Mecânico.

Tomás Leão Ursi

Orientador: Prof. Dr. Marcos de Mattos  
Pimenta

Área de Concentração: Engenharia  
Mecânica

São Paulo

2017

#### Catálogo-na-publicação

Ursi, Tomas

Solução Numérica Computacional de Escoamentos Generalizados / T.  
Ursi -- São Paulo, 2017.

46 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São  
Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.E escoamento 2.Compressível 3.Generalizado 4.Unidimensional  
5.Simulação Numérica I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

## **Resumo**

Este projeto analisa o escoamento unidimensional de fluidos compressíveis tanto para situações subsônicas quanto para supersônicas. O projeto aborda a modelagem de um escoamento sob a influência de diferentes fatores, como a variação de área, a presença de atrito e troca de calor. Após a obtenção de um modelo matemático para o escoamento, o projeto realiza simulações com o uso de softwares de simulações numéricas para diferentes casos e valida este modelo realizando comparações com resultados consagrados, por exemplo, os resultados obtidos por Fanno e Rayleigh.

Palavras-chave: Escoamento. Compressível. Generalizado. Numérico. Simulação.

### **Abstract**

This project analyses the quasi-one-dimensional flow both for subsonic as supersonic situations. The project approaches the modeling of a flow under the influence of multiple factors, such as the variation of the cross section, the presence of friction and exchange of heat. After obtaining a mathematical model for the flow, the project simulates, with the support a numerical computing software, different situations and validates the model making a comparison between the results obtained, and renowned results as the ones obtained by Fanno and Rayleigh.

Keywords: Flow. Compressible. Generalized. Numerical. Simulation.

### Lista de abreviaturas e siglas

$A$	Área
$a$	Velocidade do som
$D$	Diâmetro
$c_p$	Calor específico a pressão constante
$c_v$	Calor específico a volume constante
$f$	Fator de atrito
$F_d$	Força de arrasto
$h$	Entalpia
$I$	Função impulso
$\dot{m}$	Fluxo de massa
$M$	Número de Mach
$P$	Pressão
$q$	Taxa de transferência de calor por unidade de massa
$Q$	Taxa de transferência de calor
$R$	Constante do gás considerado
$Re$	Número de Reynolds
$s$	Entropia
$T$	Temperatura absoluta
$t$	Time
$V$	Velocidade
$V'$	Velocidade do fluido injetado
$w$	Taxa de trabalho realizado por unidade de massa
$W$	Taxa de trabalho realizado
$k$	Razão entre calores específicos
$\mu$	Viscosidade

$\rho$	Densidade
$( )_0$	Estado de estagnação
$( )^*$	Estado aonde $M=1$
$( )_g$	Gás injetado
$( )_{ev}$	Subscrito referente à evaporação de líquido
$R$	Constante universal dos gases perfeitos
$W$	Massa molecular
$D_h$	Diâmetro hidráulico

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 O ESCOAMENTO GENERALIZADO DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS.....	1
1.2 OBJETIVOS DO PROJETO .....	3
2. REVISÃO DA LITERATURA .....	4
2.1 HIPÓTESES ADOTADAS .....	4
2.2 CONCEITOS IMPORTANTES.....	5
2.2.1 Velocidade do som.....	5
2.2.2 O número de Mach .....	5
2.3 ESTADO DE ESTAGNAÇÃO .....	6
2.3.1 O estado * de referência, o estado crítico .....	7
2.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO ESCOAMENTO .....	7
2.4.1 Volume de controle analisado .....	7
2.4.2 Equação de estado para gases perfeitos .....	9
2.4.3 Equação da Continuidade .....	9
2.4.4 Conservação da energia .....	10
2.4.5 Conservação da quantidade de movimento .....	11
2.4.6 Função impulso.....	13
2.4.7 Entropia (Segunda Lei da Termodinâmica).....	13
2.4.8 Pressão de estagnação .....	14
3. EQUACIONAMENTO DO SISTEMA .....	15
3.1 PRINCIPAIS EQUAÇÕES E INCÓGNITAS .....	15
3.2 SISTEMA NA FORMA MATRICIAL .....	17



3.3	EFEITOS DE BLOCAGEM NO SISTEMA .....	19
3.4	ONDAS DE CHOQUE .....	21
4.	ROTINAS DE SIMULAÇÃO.....	23
4.1	SIMULAÇÃO DE UM ESCOAMENTO GENERALIZADO SEM BLOCAGEM.....	23
4.2	SIMULAÇÃO DE UM ESCOAMENTO GENERALIZADO COM BLOCAGEM.....	27
5.	SIMULAÇÕES PROPOSTAS.....	31
5.1	PROBLEMA 1: PROBLEMA 9.3 PROPOSTO POR ZUCROW E HOFFMAN (1976) .....	31
5.1.1	Enunciado .....	31
5.1.2	Hipóteses adotadas .....	32
5.1.3	Análise do Problema .....	32
5.1.4	Conclusões .....	34
5.2	PROBLEMA 2: PROBLEMA 12.2 PROPOSTO POR OOSTHUIZEN E CARSCALLEN (1994).....	34
5.2.1	Enunciado .....	34
5.2.2	Análise do problema .....	35
5.2.3	Análise dos Resultados.....	38
5.3	PROBLEMA 3: PROBLEMA 6.6 PROPOSTO POR HODGE (1995)	38
5.3.1	Enunciado .....	38
5.3.2	Hipóteses adotadas .....	39
5.3.3	Equacionamento do problema .....	39
5.3.4	Análise de Resultados .....	45
5.4	Avaliação do modelo .....	45

6. CONCLUSÕES.....	46
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	48

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-2 Comparação entre estados de estagnação de dois pontos aleatórios do escoamento, Zucker(2002).....	6
Figura 2-2 Volume de controle para escoamento generalizado.....	8
Figura 5-1 Área da seção transversal ao longo do duto .....	32
Figura 5-2 Número de Mach ao longo do escoamento .....	33
Figura 5-3 Formato do bocal analisado .....	35
Figura 5-4 Número de Mach para o Problema 2.....	37
Figura 5-5 Pressões de estagnação para o problema 2 .....	37
Figura 5-6 Pressões estáticas para o problema 2 .....	37
Figura 5-7 Temperaturas estáticas para o problema 2 .....	37
Figura 5-8 Diâmetro do duto pela posição .....	40
Figura 5-9 Área do duto ao longo do escoamento .....	41
Figura 5-10 Razão da vazão mássica ao longo de x .....	42
Figura 5-11 Número de Mach ao longo do escoamento .....	43
Figura 5-12 Temperaturas estáticas ao longo do escoamento .....	44
Figura 5-13 Pressões estáticas ao longo do escoamento .....	44

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Variáveis do escoamento generalizado .....	16
Tabela 2 Coeficientes de influência .....	18
Tabela 3 Resultados do problema 2 .....	37

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1O ESCOAMENTO GENERALIZADO DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

Em uma análise de um escoamento de gases a variação da massa contida em determinado volume é significativa e se faz fundamental para uma análise com resultados robustos levar em conta a compressibilidade deste fluido. Ao longo de um escoamento um gradiente de pressão é associado, por exemplo, ao perfil de velocidades deste fluxo. Este gradiente de pressão incorre em diferenças na densidade do fluido, e a importância destas variações e gradientes cresce atrelada à compressibilidade do fluido, significativa em estudos que envolvam gases. Estas variações, por sua vez, terão consequências diretas na energia cinética do fluido e, portanto, em sua temperatura. Com o aumento das velocidades do escoamento, principalmente para velocidades próximas ao número de Mach 1, estes gradientes impõem variações significativas às propriedades do escoamento e o comportamento do fluido se distingue do observado no cotidiano e, portanto, da intuição humana. Essa diferença apresenta valores expressivos justamente devido à compressibilidade do fluido, tornando relevante o estudo da dinâmica dos fluidos compressíveis.

Em cursos de graduação, a análise de escoamentos compressíveis é realizada, em geral, levando-se em consideração casos particulares de escoamentos e os resultados são apresentados desta mesma forma, com os possíveis efeitos que possam atuar sobre o fluido de maneira isolada. Zucrow (1976) chama de “escoamentos simples” os que são apresentados de forma separada. Para Zucrow (1976) analisam :

- Escoamentos isentrópicos com variação de área;
- Escoamentos sob efeito de atrito simples;
- Escoamentos com adição de calor.

Esta análise, embora didática, é falha em retratar o que de fato ocorre em situações práticas, aonde um ou mais destes efeitos têm influência simultânea no estado presente do fluido. O estudo dos estados, quando há múltiplos fatores envolvidos, não apresenta resultados diretos e requer uma

análise mais generalizada do problema, mesmo para gases perfeitos. O fato de múltiplos fatores atuarem simultaneamente no estado do fluido impõe que os resultados sejam obtidos através de rotinas numéricas, e por este motivo o Software Matlab® é utilizado neste trabalho para que obter valores numéricos para diferentes situações de entrada.

Conforme mencionado anteriormente, situações aonde a análise através da abordagem de escoamento generalizado se mostra mais relevante são situações em que a velocidade do fluido se apresenta próxima ao número de Mach igual a 1. Situações de engenharia que apresentam tal cenário são, conforme destacado por Oosthuisen(1997):

- Design de aeronaves de alta velocidade;
- Aplicações aeroespaciais;
- Turbinas a gás: nas lâminas da turbina e nos bocais onde o fluxo compressível deve ser considerado;
- Turbinas a vapor: novamente, nas lâminas da turbina o fluxo deve ser analisado como compressível;
- Válvulas de admissão e escape devem ser tratados como compressível;
- Linhas de transmissão de gás natural: a compressibilidade do fluido é importante;
- Câmaras de combustão devido as altas temperaturas e velocidades envolvidas.

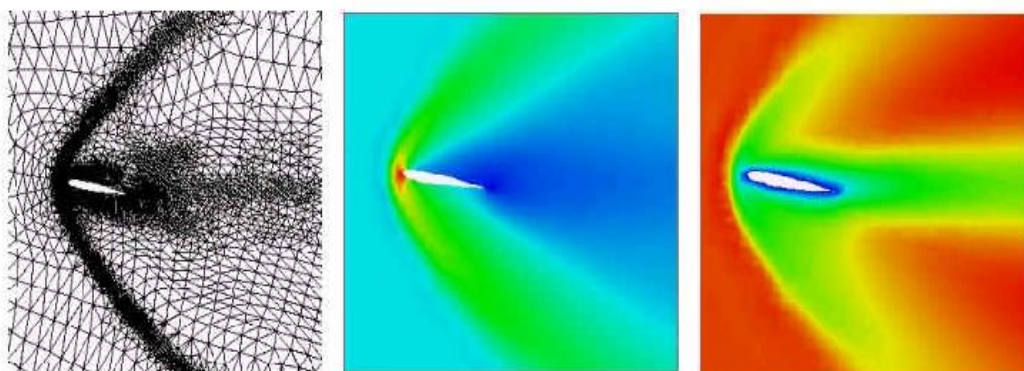


Figura 1-1 Escoamento compressível/quase-incompressível ao redor de um aerofólio NACA0012 com ângulo de ataque de 10 graus

## 1.2 OBJETIVOS DO PROJETO

Com este projeto almeja-se obter um programa que realize simulações de escoamentos sob influência simultânea de diferentes fatores. Espera-se que o programa seja versátil para diferentes entradas e situações, englobando escoamentos supersônicos e subsônicos. O modelo será validado através da verificação se os resultados representam com precisão os resultados obtidos por autores para os mencionados “escoamentos simples”. Espera-se encontrar ensaios com altos valores do número de Mach, de forma a validar o modelo para situações reais.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 HIPÓTESES ADOTADAS

Este estudo irá abordar o escoamento de gases, que são mais relevantes no que tange a análise de escoamentos compressíveis. Como hipóteses elementares para se obter o modelo será considerado que:

- O fluido será tratado como um meio contínuo. Isto é relevante para que o movimento individual das moléculas não impacte diretamente o restante do fluido;
- Não ocorrem reações químicas. Isso é importante para a composição do gás permanecer constante ao longo do escoamento e não ocorrer liberação de energia interna. Este caso é relevante, por exemplo, para a análise da propulsão de um foguete, aonde ocorrem reações de combustão que são fundamentais para a análise;
- O gás será tratado como gás perfeito e, portanto, obedece a equação de estado de gases perfeitos:

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{R}{W} T \quad (1)$$

Além disso, o calor específico a pressão constante e a volume constante permanecem constantes e, portanto, a razão entre eles,  $k$ , também é constante.

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (2)$$

- Efeitos gravitacionais sobre o fluido podem ser desprezados. Para gases esta hipótese retrata bem casos reais, uma vez que a ordem de grandeza da massa de gases é, normalmente, baixa e a energia cinética do fluido é significativamente maior do que a energia potencial;
- Efeitos magnéticos e elétricos são desprezados. Estes efeitos são relevantes quando o fluido conduz eletricidade e está exposto a um campo elétrico, o que não é o caso;
- Os efeitos da viscosidade são desprezados.

## 2.2 CONCEITOS IMPORTANTES

Alguns conceitos são fundamentais para a obtenção das equações de estado do sistema e serão usados de forma extensiva na descrição de um escoamento compressível generalizado. É importante que se entenda as considerações acerca destes conceitos.

### 2.2.1 Velocidade do som

A velocidade na qual uma perturbação no meio se propaga é chamada de velocidade da onda. Esta velocidade depende do tipo do meio e também do estado termodinâmico deste. O tipo do meio é relevante uma vez que a velocidade do som no meio é inversamente proporcional à compressibilidade do meio.

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = kRT \quad (3)$$

Na forma diferencial, a equação 3 fica na forma:

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{dk}{k} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \right) \quad (4)$$

### 2.2.2 O número de Mach

O número de Mach é definido pela razão entre a velocidade de escoamento do fluido e a velocidade sônica do mesmo. Desta definição e da equação (3), tem-se:

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{kRT} \quad (5)$$

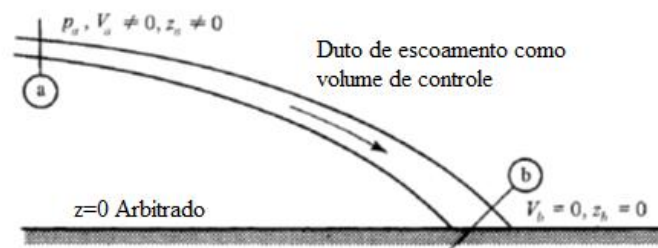
Esta equação, escrita na forma diferencial fica:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} + \frac{dW}{W} - \frac{dk}{k} - \frac{dT}{T} \quad (6)$$



### 2.3 ESTADO DE ESTAGNAÇÃO

Conforme descreve Zucker (2002) o estado de estagnação descreve um estado hipotético em que seriam obtidas as propriedades do fluido a partir da referência do fluido, ao estado estático do fluido. Ou seja, o estado termodinâmico que seria obtido se o escoamento fosse levado a potencial e velocidade nulos sem adição de calor e sem perdas. Ou seja, o processo de estagnação é isentrópico.



Para gases, o estado de estagnação, possui entalpia de:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (7)$$

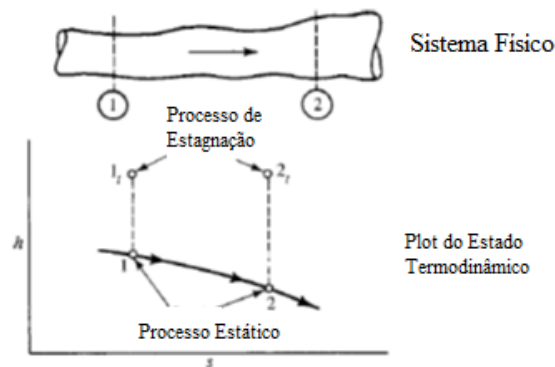


Figura 2-1 Comparação entre estados de estagnação de dois pontos aleatórios do escoamento, Zucker(2002)

É importante salientar que o estado de referência é um estado hipotético e pode não existir ao longo do escoamento. As equações para se obter a pressão, a densidade, a temperatura e o número de Mach a partir de um determinado estado, são:

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (8)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (9)$$

$$\frac{T_0}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right] \quad (10)$$

### 2.3.1 O estado \* de referência, o estado crítico

Analogamente ao estado de estagnação, as condições do estado crítico seriam obtidas caso o escoamento fosse levado isentrópicamente até que o número de Mach atingisse 1.

As equações para se obter a pressão, a densidade, a temperatura a partir do número de Mach são:

$$\frac{T^*}{T} = \left[\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2\right] \quad (11)$$

$$\frac{p^*}{p} = \left[\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (12)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left[\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (13)$$

## 2.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO ESCOAMENTO

O sistema será analisado a partir de relações termodinâmicas fundamentais que serão utilizadas para obter um sistema de equações diferenciais aplicáveis a sistemas que seguem as hipóteses simplificadoras mencionadas nos tópicos anteriores.

### 2.4.1 Volume de controle analisado

O volume de controle utilizado na análise do escoamento generalizado deve representar as possíveis alterações de propriedades do sistema entre um estado e o estado diferencial subsequente. O volume de controle segue o volume diferencial descrito por Shapiro (1956) e que representa:

- i. Variação de área;
- ii. Atrito com a parede do conduto;

- iii. Arrasto de corpos internos;
- iv. Mudança de fase de componentes do sistema;
- v. Mistura de gases injetados no sistema;
- vi. Mudanças no peso molecular e no calor específico do gás decorrente de possíveis reações químicas, evaporação, injeção de gases;

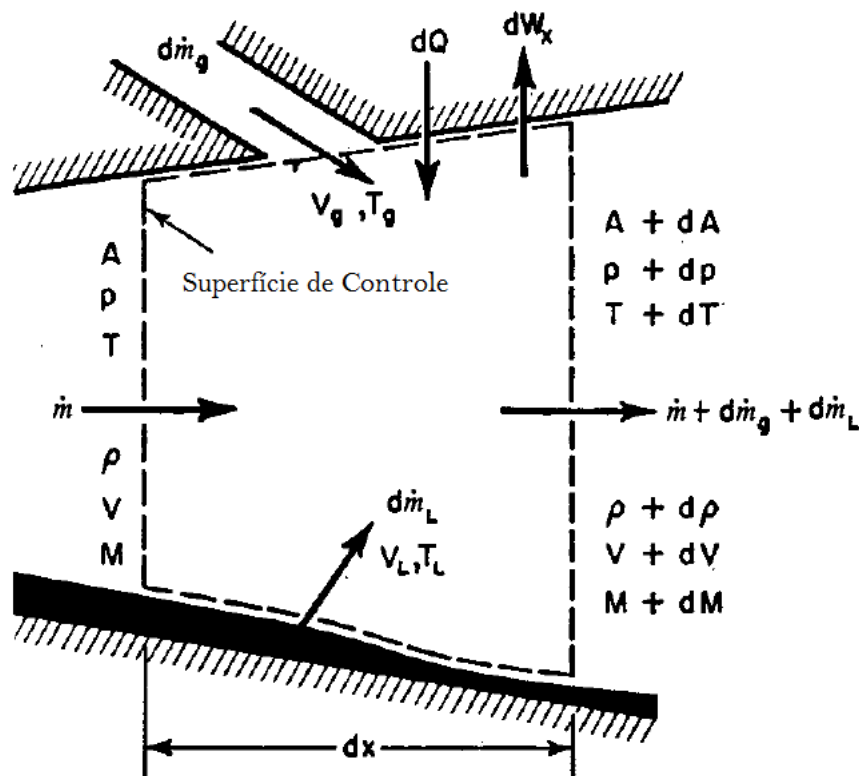


Figura 2-2 Volume de controle para escoamento generalizado

Com este volume de controle é possível obter para cada estado os incrementos:  $A + dA$ ,  $P + dP$ ,  $\rho + d\rho$ ,  $T + dT$ ,  $M + dM$ ,  $h + dh$ ,  $s + ds$ . Este volume de controle retrata os principais fatores externos que podem atuar num volume de controle de um escoamento unidimensional. Entretanto, será desconsiderada desta análise mudanças de fase dos componentes do sistema e mudanças no peso molecular e no calor específico do gás decorrente de possíveis reações químicas, evaporação, injeção de gases.

### 2.4.2 Equação de estado para gases perfeitos

Seguindo a hipótese adotada de que o sistema é composto por gases perfeitos, a equação que relaciona a pressão, a densidade e a temperatura é:

$$P = \rho * R * T \quad (14)$$

Na forma diferencial, a equação 14 fica:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \quad (15)$$

### 2.4.3 Equação da Continuidade

O fluxo de massa é uma variável de interesse do sistema. Esta análise considera somente a participação de gases no sistema. Qualquer escoamento de líquido no sistema será desconsiderado na análise do volume de controle.

O fluxo de massa pode ser expresso pela equação 15:

$$\dot{m} = \rho AV \quad (16)$$

Que na forma diferencial fica:

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad (17)$$

Lembrando que o fluxo de massa é referente ao fluxo de gás. No caso de partículas que evaporam ao longo do escoamento, esta adição de massa ao escoamento pode ser representada por  $d\dot{m}_{ev}$ , e assim, a variação da massa em uma seção do escoamento pode ser representada por:

$$d\dot{m} = d\dot{m}_g + d\dot{m}_{ev} \quad (18)$$

Oosthuizen (1994) sugere adotar  $M^2$  ao longo da dedução das equações do escoamento generalizado por retirar a raiz do quociente da fórmula com que se obtém o número de Mach. Da definição do número de Mach, se obtém:

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{kRT} \quad (19)$$

De maneira análoga, para o estado diferencial subsequente ao instante inicial:

$$(M + dM)^2 = \frac{(V + dV)^2}{(a + da)^2} = \frac{(V + dV)^2}{kR(T + dT)} \quad (20)$$

Rearranjando as equações 19 e 20, multiplicando os termos, e desprezando termos de segunda ordem, a seguinte equação é obtida:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{2dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (21)$$

#### 2.4.4 Conservação da energia

Com as hipóteses adotadas, a variação da energia decorre de mudanças na energia potencial do sistema. A evaporação de componentes do sistema será desconsiderada a partir deste ponto da análise. Para o volume de controle da figura 2-3 a variação da energia entre os estados,  $x$  e  $x + dx$ , pode ser escrito com a primeira lei da termodinâmica, na forma da equação (22), aonde o subscrito  $i$  remete à injeção de gás:

$$\begin{aligned} \dot{m}(dq - dw_s) = & \left[ \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} \right) - d\dot{m} \left( h_i + \frac{V_i^2}{2} \right) \right] \\ & + (\dot{m} + d\dot{m}) \left[ h + dh + \frac{V + dV^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Dividindo a equação por  $\dot{m}$  rearranjando as equações e denotando:

$$\begin{aligned} dq - dw_s = & \left[ (h + dh) + \frac{(V + dV)^2}{2} - \left( h + \frac{V^2}{2} \right) \right] \\ & - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \left( h - h_i + \frac{(V - V_i)^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Se  $T_0$  e  $T_0 + dT_0$  são a temperatura de estagnação na entrada do volume de controle e na saída dele, respectivamente, então, pela definição de temperatura de estagnação:

$$h_0 = h - \frac{V^2}{2} \quad (24)$$

E analogamente:

$$h_0 + dh_0 = h + dh - \frac{(V + dV)^2}{2} \quad (25)$$

Para um gás perfeito,  $dh_0 = c_p dT_0$ , e, portanto, se obtém uma expressão mais simplificada para a energia do problema com:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{1}{c_p T_0} \left\{ dq - dw_s - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \left[ (h - h_i) + \frac{(V - V_i)^2}{2} \right] \right\} \quad (26)$$

Lembrando que a temperatura de estagnação provém da relação entre a temperatura e o número de Mach do estado de escoamento através da relação:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{(k-1)}{2} M^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (27)$$

#### 2.4.5 Conservação da quantidade de movimento

A força líquida atuando sobre o fluido e, conseqüentemente, sobre o volume de controle é igual ao aumento da quantidade de movimento do escoamento que passa através do volume de controle. Oosthuizen (1994) denota a variação da quantidade de movimento do sistema esquematicamente por:

Força líquida da pressão em 1	-	Força líquida da pressão em 2	+	Força líquida da pressão na superfície inclinada	-	Componente da força de cisalhamento líquido na direção do escoamento	-
Força de Arrasto Líquido	=	Fluxo de momento em 2	-	Fluxo de momento em 1	-	Fluxo de momento injetado	

A equação para o volume de controle, considerando que o fluido injetado tem a mesma pressão do escoamento, temos:

$$PA - (P + dP)(A + dA) + (P)dA - dF_D - \tau_w A_w = (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) - \dot{m}V - d\dot{m}V_i \cos \alpha_i \quad (28)$$

Será tomado como hipótese que o ângulo decorrente da variação da área é pequeno, fazendo que o último termo da equação (28) seja anulado.  $F_d$  representa todas as forças de arrasto na direção do escoamento unidimensional. O termo  $d\dot{m}V_i \cos \alpha_i$  denota a injeção de massa no sistema,  $d\dot{m}$ , com velocidade  $V_i$  e ângulo  $\alpha_i$  em relação à direção do escoamento.

Com o fator de atrito de Fanno para calcular a tensão de cisalhamento, representada por  $\tau_w$ , do escoamento com a parede decorrente do atrito, sendo que  $f = f(Re_D, \frac{r}{D})$ . :

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2} \quad (29)$$

Dividindo a equação (25) por  $\dot{m}$ , utilizando a definição de  $r_i$  dada pela equação (27) e lembrando a relação do número de Mach dada pela equação (28), chega-se na equação simplificada (29) obtida por Oosthuizen (1994).

$$r_i = \frac{V_i}{V} \cos \phi_i \quad (30)$$

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2 \rho}{kP} \quad (31)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{2} \left( \frac{fP_w}{A} dx + \frac{2dF_D}{kPM^2A} - 2r_i \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + kM^2 \frac{dV}{V} + kM^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (32)$$

Outro conceito importante é a definição de diâmetro hidráulico, pela equação (30):

$$D_h = \frac{4A}{P_w} \quad (33)$$

A equação (29) então fica, conforme em Hodge(1995):

$$\frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{2} \left( 4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kPM^2A} - 2r_i \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + kM^2 \frac{dV}{V} + \quad (34)$$

$$kM^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

Shapiro (1956) introduz ainda o título de escoamento de forma a diferenciar o fluxo de gás do fluxo de líquido possivelmente escoando.

$$y_g = \frac{V_g}{V} \quad (35)$$

$$y_L = \frac{V_L}{V} \quad (36)$$

$$(1 - y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = (1 - y_g) \frac{d\dot{m}_g}{\dot{m}} + (1 - y_L) \frac{d\dot{m}_L}{\dot{m}} \quad (37)$$

A equação que Shapiro (1956) obtém, por fim, é:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{2} \left( 4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kPM^2A} - 2r_i \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + kM^2 \frac{dV}{V} + \\ k(1 - y)M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

De início, não será considerado a variação de líquido para gás e, portanto, a equação governante do equilíbrio de momentos do sistema é a equação 31. A mesma equação é apresentada por Oosthuizen (1994) com a equivalência:

$$\frac{4f dx}{D_h} = \frac{f P dx}{A} \quad (39)$$

#### 2.4.6 Função impulso

A função impulso é definida por:

$$I = PA + \dot{m}V = PA(a + kM^2) \quad (40)$$

Esta função é importante para sistemas propulsores. Conforme ressalta Shapiro (1956), um incremento no valor desta função representa um aumento na força total exercida pelo escoamento nas paredes internas de um duto no sentido oposto ao escoamento. Na forma diferencial, fica:

$$\frac{dI}{I} = \frac{dA}{A} + \frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{1 + kM^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (41)$$

#### 2.4.7 Entropia (Segunda Lei da Termodinâmica)

Através da aplicação da segunda lei da termodinâmica, a variação da entropia através do volume de controle para um gás perfeito num processo sem reações químicas, é dada por:



$$\frac{ds}{C_p} = \frac{dT}{T} - \frac{(k-1)}{k} \frac{dM^2}{M^2} \quad (42)$$

No caso de um fluido que evapora durante escoamento:

$$ds_{total} = ds + (s - s_g) \frac{d\dot{m}_g}{\dot{m}} + (s - s_L) \frac{d\dot{m}_L}{\dot{m}} \quad (43)$$

#### 2.4.8 Pressão de estagnação

A pressão se relaciona com a pressão de estagnação através da relação:

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (44)$$

Para o estado subsequente em  $dx$ , é obtido, portanto:

$$P_0 + dP_0 = (P + dP) \left[ 1 + \frac{k-1}{2} (M^2 + dM^2) \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (45)$$

Dividindo a equação 45 pela equação 44:

$$\frac{P_0 + dP_0}{P_0} = \left( 1 + \frac{dP}{P} \right) \left[ 1 + \frac{\frac{(k-1)dM^2}{2}}{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (46)$$

A equação (46) em uma primeira ordem de precisão, fornece:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\frac{kM^2}{2}}{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}} \frac{dM^2}{M^2} \quad (47)$$

### 3. EQUACIONAMENTO DO SISTEMA

#### 3.1 PRINCIPAIS EQUAÇÕES E INCÓGNITAS

Recapitulando as principais equações obtidas nas seções anteriores que definirão o sistema e permitirão, através da análise das relações entre as incógnitas e relações constituintes, simular o sistema dada uma entrada e condições de contorno. As principais equações obtidas são:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} - \frac{dW}{W} \quad (48)$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{2dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (49)$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \quad (50)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{2} \left( 4f \frac{dx}{D_h} + \frac{2dF_D}{kPM^2A} - 2r_i \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + kM^2 \frac{dV}{V} + \quad (51)$$

$$kM^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{dA}{A} + \frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{1 + kM^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (52)$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{(k-1)}{2} M^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (53)$$

$$\frac{ds}{C_p} = \frac{dT}{T} - \frac{(k-1)}{k} \frac{dP}{P} \quad (54)$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\frac{kM^2}{2}}{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}} \frac{dM^2}{M^2} \quad (55)$$

As incógnitas, portanto, que descrevem o escoamento quase unidimensional generalizado e resolvem as 8 equações anteriores são 12 e são:

Tabela 1 Variáveis do escoamento generalizado

$\frac{dP}{P}$	$\frac{dT}{T}$	$\frac{d\rho}{\rho}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$\frac{dV}{V}$	$\frac{dA}{A}$
$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{dI}{I}$	$\frac{dT_0}{T_0}$
$\frac{ds}{c_p}$	$\frac{dP_0}{P_0}$	$\frac{4f dx}{D_h} + 2 \frac{dF_D}{kPM^2A} - \frac{2r_i d\dot{m}}{\dot{m}}$

O sistema é, portanto, de ordem 8, e possui 12 incógnitas. Para equalizar o número de incógnitas com o número de equações serão definidas 4 variáveis chave e consideradas como entradas do sistema e previamente conhecidas em função da variável independente  $x$ :

- $\frac{dA}{A}$ : Que é função da geometria do conduto analisado e geralmente a área é definida por uma função  $A(x)$ ;
- $\frac{dT_0}{T_0}$ : Em grande parte dos problemas  $T_0$  pode ser expresso em função de  $x$ , muitas vezes através de um polinômio de segunda ordem e está relacionada com uma troca de calor do escoamento;
- $\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$  Também é uma condição de adição de massa característica da montagem do sistema analisado, e muitas vezes é nulo.

O último termo da tabela pode ser dividido no termo que define o atrito  $\frac{4f dx}{D_h}$  e/ou o termo que define o arrasto do sistema  $2 \frac{dF_D}{kPM^2A}$ ,  $dF_D$  depende da geometria de determinado corpo do sistema. O fator de atrito  $f$  muitas vezes é constante ou depende da rugosidade do conduto e pode ser descrito como função da variável independente  $x$ . O diâmetro hidráulico do escoamento tem uma função correlata a  $A(x)$ . Os termos restantes podem ser determinados pelas equações do sistema e são denominados por Hodge (1995) como propriedades do escoamento. É evidente que as variáveis conhecidas do sistema são constantes ou em função da variável  $x$ , o que faz sentido em uma análise de um escoamento unidimensional que varia justamente nesta direção.

### 3.2 SISTEMA NA FORMA MATRICIAL

As equações de 48 a 55 podem ser colocadas na forma da matriz 8x8 56, com as variáveis A, B, C, D, E para diminuir as dimensões da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & kM^2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -A & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k - \frac{1}{k} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dP/P \\ dT/T \\ d\rho/\rho \\ dM^2/M^2 \\ dV/V \\ dI/I \\ ds/c_p \\ dP_0/P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dA}{A} \\ D + E \\ dA/A \\ dT_0/T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Aonde:

$$A = \frac{kM^2}{1 + kM^2} \quad (57)$$

$$B = \frac{\frac{(k-1)M^2}{2}}{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}} \quad (58)$$

$$C = \frac{\left(\frac{kM^2}{2}\right)}{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}} \quad (59)$$

$$D = -\frac{kM^2}{2} \left( \frac{4f dx}{D_h} + 2 \frac{dF_D}{kPM^2A} \right) \quad (60)$$

$$E = -kM^2(1 - r_i) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (61)$$

Para se obter as equações em função das 8 propriedades do sistema, basta inverter a equação 56 que após um trabalho algébrico fornece, em função dos termos  $F_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} dP/P \\ dT/T \\ d\rho/\rho \\ dM^2/M^2 \\ dV/V \\ dI/I \\ ds/c_p \\ dP_0/P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{P1} & F_{P2} & F_{P3} & F_{P4} & 0 & F_{P6} & 0 & 0 \\ F_{T1} & F_{T2} & F_{T3} & F_{T4} & 0 & F_{T6} & 0 & 0 \\ F_{\rho1} & F_{\rho2} & F_{\rho3} & F_{\rho4} & 0 & F_{\rho6} & 0 & 0 \\ F_{M1} & F_{M2} & F_{M3} & F_{M4} & 0 & F_{M6} & 0 & 0 \\ F_{V1} & F_{V2} & F_{V3} & F_{V4} & 0 & F_{V6} & 0 & 0 \\ F_{I1} & F_{I2} & F_{I3} & F_{I4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{S2} & 0 & F_{S4} & 0 & F_{S6} & 0 & 1 \\ 0 & F_{02} & 0 & 1 & 0 & F_{06} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dA}{A} \\ D + E \\ dA/A \\ dT_0/T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Os termos  $F_{ij}$  são denominados por Oosthuizen (1994) como “Coeficientes de influência” e estão apresentados na tabela a seguir:

Tabela 2 Coeficientes de influência

$F_{P1} = \frac{kM^2}{M^2 - 1}$	$F_{P2} = -\frac{k(k-1)M^4}{2(M^2 - 1)}$
$F_{P3} = \frac{kM^2}{M^2 - 1}$	$F_{P4} = -\frac{1 + (k-1)M^2}{M^2 - 1}$
$F_{P6} = -\frac{kM^2 \left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$	$F_{T1} = \frac{(k-1)M^2}{M^2 - 1}$
$F_{T2} = -\frac{(k-1)M^2(kM^2 - 1)}{2(M^2 - 1)}$	$F_{T3} = \frac{(k-1)M^2}{M^2 - 1}$
$F_{T4} = -\frac{(k-1)M^2}{M^2 - 1}$	$F_{T6} = \frac{(kM^2 - 1) \left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$
$F_{\rho1} = \frac{1}{M^2 - 1}$	$F_{\rho2} = -\frac{(k-1)M^2}{2(M^2 - 1)}$
$F_{\rho3} = \frac{M^2}{M^2 - 1}$	$F_{\rho4} = -\frac{1}{M^2 - 1}$
$F_{\rho6} = \frac{\left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$	$F_{M1} = -2 \frac{\left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$
$F_{M2} = \frac{(kM^2 - 1) \left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$	$F_{M3} = -2 \frac{\left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$
$F_{M4} = 2 \frac{\left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$	$F_{M6} = -\frac{(kM^2 + 1) \left[ 1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]}{M^2 - 1}$
$F_{V1} = -\frac{1}{M^2 - 1}$	$F_{V2} = \frac{(k-1)M^2}{2(M^2 - 1)}$
$F_{V3} = -\frac{1}{M^2 - 1}$	$F_{V4} = \frac{1}{M^2 - 1}$
$F_{V6} = -\frac{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}}{M^2 - 1}$	$F_{I1} = \frac{kM^2}{kM^2 + 1}$
$F_{I2} = \frac{kM^2}{kM^2 + 1}$	$F_{I3} = \frac{kM^2}{kM^2 + 1}$

$F_{I4} = \frac{1}{kM^2 + 1}$	$F_{S2} = -\frac{(k-1)M^2}{2}$
$F_{S4} = -\frac{k-1}{k}$	$F_{S6} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$
$F_{02} = \frac{kM^2}{2}$	$F_{06} = -\frac{kM^2}{2}$

A matriz 62 representa as oito equações diferenciais para cada uma das variáveis desconhecidas do sistema, expressos em função dos potenciais ou do número de Mach. Como esta análise enfatiza um escoamento unidimensional, a única variável independente do sistema é  $x$  e, portanto, todos os diferenciais podem ser expressos em função desta variável. Assim, o diferencial do número de Mach se apresenta como  $\frac{dM^2}{dx}$  e  $\frac{dM(x)^2}{dx}$  e a partir da matriz 62 pode ser obtido através de uma equação, no caso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = & 2 \frac{\Psi}{M^2 - 1} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{(kM^2 + 1)\Psi}{1 - M^2} \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \\ & + \frac{kM^2\Psi}{1 - M^2} \left( \frac{4f}{D_h} + \frac{2}{kPAM^2} \frac{dF_D}{dx} \right) \\ & + \left( -2r_i + \frac{2(1 + kM^2)\Psi}{1 - M^2} \right) \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \end{aligned} \quad (63)$$

Definindo  $\Psi = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$ , termo que aparece de forma recorrente nas expressões deduzidas acima.

Com estas equações expressas em função da variável independente  $x$ , se conhecido o comportamento das variáveis chave em função de  $x$ , é possível integrar a equação 63 e obter o número de Mach em função de  $x$ .

### 3.3 EFEITOS DE BLOCAGEM NO SISTEMA

Um dos principais efeitos que este trabalho visa analisar é operação de escoamentos com valores do número de Mach próximos a um. A redução da área, o aumento do atrito ou do calor adicionado ao escoamento podem gerar efeitos opostos dependendo do estado presente do escoamento. Em escoamentos subsônicos tais ajustes podem gerar uma redução no fluxo de

massa, enquanto em escoamentos supersônicos podem surgir choques ou mudanças abruptas dos parâmetros de escoamento definidos anteriormente.

Com o auxílio do parâmetro definido previamente,  $\Psi$ , e considerando que a injeção de ar no sistema será realizada na mesma velocidade do escoamento ( $r_i = 0$ ), a equação 63 que exprime o  $dM^2/M^2$  em função das derivadas parciais de  $x$ , fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = & 2 \frac{\Psi}{M^2 - 1} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{(kM^2 + 1)\Psi}{1 - M^2} \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \\ & + \frac{kM^2\Psi}{1 - M^2} \left( \frac{4f}{D_h} + \frac{2}{kPAM^2} \frac{dF_D}{dx} \right) \\ & + \left( \frac{2(1 + kM^2)\Psi}{1 - M^2} \right) \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \end{aligned} \quad (64)$$

A variável dependente para esta equação é  $M$  e a variável independente  $x$ . Posteriormente o sistema será resolvido com a integração de equações similares a equação 64 para cada uma das variáveis dependentes do escoamento. Por hora, a equação acima será útil para a análise desejada da operação próxima ou no ponto de blocagem. Já é possível observar que quando  $M=1$  o denominador de alguns termos da função 65 vai a zero, o que, para um integrador numérico pode ser problemático na análise do sistema. A equação 65 pode ser expressa por:

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = \frac{\Psi G(x, k, M)}{1 - M^2} \quad (65)$$

Onde:

$$\begin{aligned} G(x, k, M) = & -\frac{dA}{dx} \frac{2}{A} + kM^2 \left( \frac{4f}{D_h} + 2 \frac{\frac{dF_D}{dx}}{kPM^2A} \right) + (1 + kM^2) \frac{dT_0}{dx} \frac{1}{T_0} \\ & + 2(1 + kM^2) \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \end{aligned} \quad (66)$$

Com a função  $G(x, k, M)$  agora é possível observar que para um escoamento subsônico, um valor positivo da função  $G(x, k, M)$  incorre num incremento no número de Mach, enquanto num escoamento supersônico, o oposto é verdadeiro. O sinal de  $G(x, k, M)$  é controlado pela soma dos produtos de diferentes coeficientes de influência e adimensionais.

A transição entre um número de Mach positivo e um número de Mach negativo passa por um ponto delicado, principalmente em uma solução numérica e deve ser levado em consideração. A localização do ponto de blocagem de um bocal é muitas vezes desconhecida, a exceção de um fluxo com uma mudança de área simples, isto é, sem atrito ou calor. Esta localização, por sua vez, depende de  $T_o(x)$ ,  $A(x)$  e  $f(x)$ , variáveis conhecidas do escoamento.

### 3.4 ONDAS DE CHOQUE

Outro conceito que deve ser levado em consideração no estudo de um escoamento compressível são as ondas de choque. Uma onda de choque é uma onda que percorre o escoamento aonde a velocidade, a pressão e a temperatura mudam em quantidades finitas.

Uma onda de choque tem comprimento desprezível frente as dimensões de um escoamento usual e a grandeza chave para sua descrição será a posição em que ocorre ao longo do escoamento, a partir da entrada do fluido.

Para um gás calorificamente perfeito, a temperatura de estagnação permanece constante através da onda de choque normal. Entre um ponto 1 que precede imediatamente a onda de choque e um ponto 2 imediatamente após a onda de choque, Hodge (1995) obtém as seguintes relações:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2(k-1) + 2}{2kM_1^2 - (k-1)} \quad (67)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2kM_1^2}{k+1} - \frac{k-1}{k+1} \quad (68)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{(k-1)}{2}M_1^2\right)\left(\frac{2k}{k-1}M_1^2 - 1\right)}{M_1^2\left(\frac{2k}{(k-1)} + \frac{k-1}{2}\right)} \quad (69)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2} \quad (70)$$



Estas relações são suficientes para descrever a transição do estado do fluido que precede a onda de choque para o estado logo após a onda e possibilita simulações mais robustas, abordando casos aonde ocorrem ondas de choque ao longo do escoamento.

#### 4. ROTINAS DE SIMULAÇÃO

A lógica da simulação para um escoamento unidimensional qualquer provém das relações entre variáveis independentes do sistema e variáveis correlacionadas a elas através das relações descritas na matriz 2.

A equação fundamental para simular um escoamento unidimensional ao longo de um eixo  $x$  é a equação que descreve o comportamento do número de Mach ao longo desta dimensão. As demais propriedades do sistema estão, em sua maioria, correlacionadas a este valor. Conforme o que foi apresentado anteriormente, esta equação possui valores críticos para números de Mach próximos a um, devido a quocientes que apresentam o valor  $1 - M^2$ . Nas próximas seções será apresentado primeiramente uma rotina de simulação para casos que não envolvam a bloqueio do escoamento, e a seguir a rotina que a partir do caso mais simples introduz os conceitos necessários a simulação deste sistema.

##### 4.1 SIMULAÇÃO DE UM ESCOAMENTO GENERALIZADO SEM BLOQUEIO

No caso aonde não há nenhum ponto com velocidade supersônica no escoamento, e, portanto, a equação 64 não apresenta nenhuma singularidade e pode ser integrada diretamente a partir das variáveis independentes apresentadas em função de  $x$  através de um método integrativo qualquer. O método de Runge-Kutta de quarta ordem é eficaz para tal objetivo a partir de  $\frac{dM}{dx} = f(x, k, M)$ . Dada uma localização  $x$ , a solução para a próxima localização  $x + \Delta x$ , distante um passo  $\Delta$  da localização inicial pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
 M(x + \Delta x) &= M(x) + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 k_1 &= f(x, k, M(x)) \\
 k_2 &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, k, M(x) + \frac{\Delta x}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, k, M(x) + \frac{\Delta x}{2}k_2\right)
 \end{aligned} \tag{71}$$

$$k_4 = f(x + \Delta x, k, M(x) + \Delta x k_3)$$

A partir dos perfis dos potenciais-chave ao longo de  $x$ , é possível, portanto, descrever o comportamento do número de Mach. As demais variáveis podem ser obtidas em seguida através da integração das equações diferenciais presentes na tabela 2. De maneira mais direta, é possível obter, a partir do valor obtido para  $M$  e com uso de relações algébricas, razões entre as demais variáveis de um ponto  $x$  (1) para o próximo  $x + \Delta x$  (2).

Para obter a razão entre  $T_1$  e  $T_2$ , parte-se da fórmula da temperatura de estagnação  $T_0$ :

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (72)$$

Realizando a razão entre  $T_{01}$  e  $T_{02}$  obtém-se:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \quad (73)$$

O fluxo de massa através de uma seção pode ser escrito como:

$$\dot{m} = \rho AV = \frac{P}{RT} AM \sqrt{kRT} = PAM \sqrt{\frac{k}{RT}} \quad (74)$$

Realizando novamente a razão entre os estados 1 e 2:

$$\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_2} = \frac{P_1 A_1 M_1}{P_2 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (75)$$

A equação 75 pode ser resolvida para  $P_2$  e  $P_1$  de forma a se obter:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\dot{m}_2 A_1 M_1}{\dot{m}_1 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (76)$$

As razões entre as áreas e os fluxos de 1 e 2 são conhecidas dadas as premissas utilizadas neste trabalho e, portanto,  $\frac{P_2}{P_1}$  pode ser obtido a partir do resultado da equação 73.

De maneira análoga, a razão entre os valores do número de Mach entre as seções 1 e 2, e levando em consideração que  $k$  e  $R$  são constantes ao

longo do escoamento, uma vez que não ocorrem reações químicas e nem outra substância é injetada no sistema, fornece que:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (77)$$

Novamente, o resultado desta equação é conhecido a partir da equação 73. A razão entre a equação de estado para os estados 1 e 2 pode ser retrabalhada de forma que se obtenha:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \quad (78)$$

A partir da relação entre pressão e pressão de estagnação descrita abaixo, é possível se obter também uma razão para as pressões de estagnação.

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (79)$$

$$\frac{P_{0_2}}{P_{0_1}} = \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{T_{0_2} T_1}{T_{0_1} T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (80)$$

A entropia pode ser calculada diretamente com:

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{k-1}{k} \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (81)$$

Estas relações descritas nas linhas acima são conhecidas na literatura como equações integrais, uma vez que possibilitam que a cada integração do número de Mach se obtenham as demais propriedades do escoamento para este novo estado sem que haja a necessidade de se integrar uma a uma as equações diferenciais da tabela 2. Por ordem de aplicação, estas equações são listadas aqui como:

$$\begin{aligned}
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{\frac{T_{02}}{T_{01}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \\
\frac{P_2}{P_1} &= \frac{\dot{m}_2 A_1 M_1}{\dot{m}_1 A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \\
\frac{V_2}{V_1} &= \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \\
\frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \\
\frac{P_{02}}{P_{01}} &= \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{T_{02} T_1}{T_{01} T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \\
\frac{\Delta s}{c_p} &= \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{k-1}{k} \ln \left(\frac{P_2}{P_1}\right)
\end{aligned} \tag{82}$$

Para que se obtenha uma solução é necessário, primeiramente resolver numericamente a equação 83 através do método de integração selecionado, para então prosseguir com o cálculo das demais propriedades a partir do resultado obtido.

Para se implementar o método de Runge-Kutta de quarta ordem, por exemplo, os coeficientes do método serão calculados a partir de  $\frac{dM}{dx}$ , aonde:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dx} = M \frac{\Psi}{1 - M^2} \left[ -\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} + \frac{(kM^2 + 1)}{2} \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right. \\
\left. + \frac{kM^2}{2} \left( \frac{4f}{D_h(x)} + \frac{2}{kPAM^2} \frac{dF_D}{dx} \right) \right. \\
\left. + (1 + kM^2) \frac{1}{\dot{m}(x)} \frac{d\dot{m}(x)}{dx} \right]
\end{aligned} \tag{83}$$

Zucrow e Hoffman (1976) estabelecem um método pautado nas equações listadas em 82 para a resolução numérica de um escoamento generalizado. O processo de quatro etapas pode ser descrito como:

1. Definir as condições iniciais, usualmente o número de Mach, a velocidade, a densidade, as pressões e temperaturas do escoamento e de estagnação. Desenvolver uma relação entre as variáveis independentes e o eixo  $x$ ;
2. Utilizar a equação 71 para integrar a equação 83 para um passo  $\Delta x$  definido previamente;
3. Utilizar as equações de integração presentes em 82 para estabelecer as propriedades no novo estado  $x + \Delta x$ ;
4. Repetir os passos 2 e 3 até o alcance de  $x$  de interesse.

De forma a melhor ilustrar o procedimento 1 descrito acima, os potenciais-chave foram descritos através de funções chave e a equação 83 foi reescrita através dessas funções listadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{1}{A(x)} * \frac{dA(x)}{dx} \\
 f_2(x) &= \frac{1}{T_0(x)} * \frac{dT_0(x)}{dx} \\
 f_3(x) &= D(x) \\
 f_4(x) &= \frac{dF_D(x)}{dx} \\
 f_5(x) &= \frac{1}{\dot{m}} * \frac{d\dot{m}}{dx}
 \end{aligned} \tag{84}$$

Assim, a equação 83 pode ser reescrita conforme a equação:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM}{dx} = M \frac{\Psi}{1 - M^2} & \left[ -f_1(x) + \frac{(kM^2 + 1)}{2} f_2(x) \right. \\
 & \left. + \frac{kM^2}{2} \left( \frac{4f}{f_3(x)} + \frac{2}{kPAM^2} f_3(x) \right) + (1 + kM^2) f_5(x) \right]
 \end{aligned} \tag{85}$$

#### 4.2 SIMULAÇÃO DE UM ESCOAMENTO GENERALIZADO COM BLOCAGEM

Para simular um escoamento que passa por um ponto com velocidade igual à velocidade do som, é necessário estabelecer a localização do ponto aonde ocorre a singularidade das equações diferenciais do escoamento que relacionam o número de Mach com as variáveis independentes. Para tanto, vamos relembrar as equações:

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = \frac{\Psi G(x, k, M)}{1 - M^2} \quad (86)$$

$$G(x, k, M) = -\frac{dA}{dx} \frac{2}{A} + kM^2 \left( \frac{4f}{D_h} + 2 \frac{\frac{dF_D}{dx}}{kPM^2A} \right) + (1 + kM^2) \frac{dT_0}{dx} \frac{1}{T_0} + 2(1 + kM^2) \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \quad (87)$$

A equação (84) pode ser descrita como:

$$\frac{1 - M^2}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = \Psi G(x, k, M) \quad (88)$$

No ponto aonde  $M=1$ ,  $G(x, k, M) = 0$ , uma vez que  $\Psi$  não é igual a zero no ponto de blocagem. O ponto  $x$  aonde ocorre a blocagem do escoamento é, portanto, raiz da equação 86. Hodge (1995) chama a atenção para o fato de que:

$$\lim_{M \rightarrow 1} \frac{G(x, k, M)}{1 - M^2} = \frac{0}{0} \quad (89)$$

Uma indeterminação matemática. O valor de  $\frac{dM}{dx}$  deve ser, portanto, determinado com o auxílio da regra de L'Hospital, através da qual se obtém:

$$\lim_{M \rightarrow 1} \frac{dM}{dx} = \lim_{M \rightarrow 1} \frac{M \Psi G(x, k, M)}{2(1 - M^2)} = \frac{k + 1}{4} \left( \frac{\frac{dG}{dx}}{-2M \frac{dM}{dx}} \right)_{M=1} \quad (90)$$

Desprezando-se  $\frac{dF_D}{dx}$ , obtém-se para o termo  $\frac{dG}{dx}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dx} = & \left[ -2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + kM^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{4f}{D_h} \right) + (1 + kM^2) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) \right. \\
& \left. + 2(1 + kM^2) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) \right] \\
& + \left[ 2kM \frac{dM}{dx} \left( \frac{4f}{D_h} \right) + 2kM \frac{dM}{dx} \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) \right. \\
& \left. + 4kM \frac{dM}{dx} \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) \right]
\end{aligned} \tag{91}$$

Avaliando a equação 89 para o ponto aonde o número de Mach é igual a

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dx} = & \left[ -2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + k \frac{d}{dx} \left( \frac{4f}{D_h} \right) + (1 + k) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) \right. \\
& \left. + 2(1 + k) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) \right] \\
& + \left( \frac{dM}{dx} \right)_{M=1} \left[ 2k \left( \frac{4f}{D_h} \right) + 2k \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) + 4k \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) \right]
\end{aligned} \tag{92}$$

Obtém se então, para a equação 88:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{dM}{dx} \right)_{M=1}^2 = & -\frac{k+1}{8} \left[ -2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)_{M=1} + k \frac{d}{dx} \left( \frac{4f}{D_h} \right)_{M=1} \right. \\
& + (1 + k) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right)_{M=1} \\
& \left. + 2(1 + k) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right)_{M=1} \right] \\
& - \frac{k+1}{8} \left( \frac{dM}{dx} \right)_{M=1} \left[ 2k \left( \frac{4f}{D_h} \right) + 2k \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \right) \right. \\
& \left. + 4k \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{dx} \right) \right]_{M=1}
\end{aligned} \tag{93}$$

Esta equação fornece 2 valores para  $\frac{dM}{dx}$  no ponto sônico. O valor negativo corresponde ao trecho subsônico próximo ao ponto sônico, e em contrapartida o valor positivo corresponde ao trecho supersônico próximo a este ponto.

A simulação de um escoamento com ponto sônico, parte então da determinação da localização deste ponto a partir da equação 92:



$$\begin{aligned}
 G(x, k, M)_{M=1} &= \left( -\frac{dA}{dx} \frac{2}{A} + kM^2 \left( \frac{4f}{D_h} + 2 \frac{\frac{dF_D}{dx}}{kPM^2A} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 + kM^2) \frac{dT_0}{dx} \frac{1}{T_0} \right)_{M=1} \\
 &= \left( -\frac{dA}{dx} \frac{2}{A} + k \left( \frac{4f}{D_h} + 2 \frac{\frac{dF_D}{dx}}{kPA} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 + k) \frac{dT_0}{dx} \frac{1}{T_0} \right)_{M=1} = 0
 \end{aligned} \tag{94}$$

Em seguida é necessário se obter os valores os valores  $\frac{dM}{dx}$  nos arredores do ponto sônico, através da equação 91. Com estes valores conhecidos é possível avançar um passo antes e depois do ponto sônico, dando sequência à simulação com o método apresentado na seção 4.1. Hodge (1995) sugere que a partir da localização sônica do escoamento se obtenha primeiramente os valores na entrada  $x=0.0$ , para então se integrar adiante e encontrar as distribuições no número de Mach e as demais propriedades.

## 5. SIMULAÇÕES PROPOSTAS

De forma a validar o equacionamento proposto na seção anterior, serão realizadas, nesta seção, simulações que permitam a visualização da evolução das propriedades do fluido ao longo de um escoamento sujeito a efeitos combinados de atrito, calor, adição de massa e mudança de área, por exemplo.

A partir dos livros clássicos de estudo da dinâmica de fluidos compressíveis, foram selecionados problemas com grau de dificuldade incremental de forma a permitir uma implementação correta da metodologia proposta neste trabalho e análise da influência dos diferentes efeitos que atuam sobre um escoamento que se enquadre nas hipóteses simplificadoras adotadas ao longo deste trabalho. Os primeiros problemas são facilmente implementados no Matlab® e a abordagem proposta pode ser utilizada em um curso de dinâmica de fluidos compressíveis apresentando o conteúdo de escoamento generalizado unidimensional de forma didática.

### 5.1 PROBLEMA 1: PROBLEMA 9.3 PROPOSTO POR ZUCROW E HOFFMAN (1976)

O primeiro problema selecionado apresenta uma variação de área combinada com a atuação de atrito no escoamento, ocasionando perdas na pressão de estagnação do escoamento.

#### 5.1.1 Enunciado

Ar entra em um difusor subsônico com um número de Mach igual a 0,9. As paredes do difusor apresentam inclinação igual a  $\alpha = 7^\circ$  e o raio de entrada é igual a  $y = 0.25m$ . O ar apresenta  $k$  constante e igual a 1,4 e  $f = 0.01$ . O duto apresenta comprimento de 1m.

### 5.1.2 Hipóteses adotadas

Para a resolução deste problema, são adotadas as mesmas hipóteses do desenvolvimento das equações da seção 4. O escoamento é considerado em regime permanente e plenamente desenvolvido. O ar é considerado um gás perfeito, com  $k$  constante. A temperatura de estagnação é considerada constante e não existem fontes externas de trabalho ao sistema à exceção do atrito.

### 5.1.3 Análise do Problema

Este escoamento é uma versão simplificada do equacionamento proposto nas seções anteriores, apresentando somente atrito e mudança de área. Além disso, não há incremento à vazão mássica do sistema.

O raio da seção apresenta a seguinte forma:

$$y(x) = y_i + \tan(\alpha) * x \quad (95)$$

Sendo  $y_i = 0,25m$  e  $\alpha = 7^\circ$ . Desta forma, a área de seção se apresenta da seguinte forma:

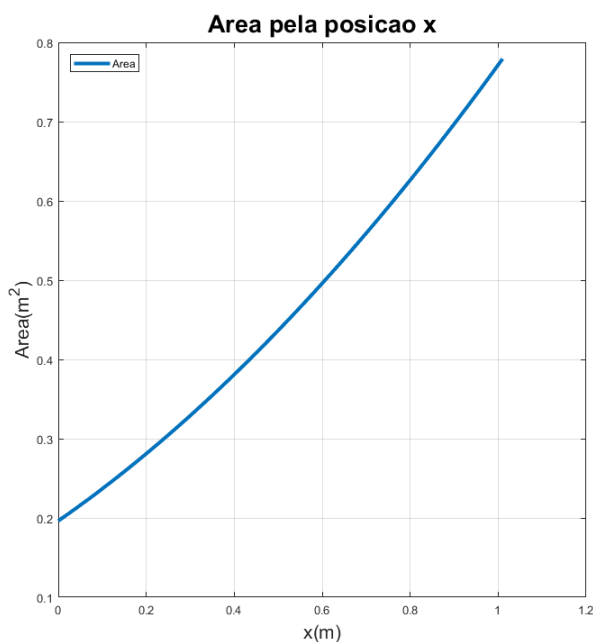


Figura 5-1 Área da seção transversal ao longo do duto

O primeiro e o terceiro potenciais-chave podem então ser calculados e os demais são nulos para este problema. Eles são, portanto, para este problema:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{1}{A(x)} * \frac{dA(x)}{dx} = 2 * \frac{\tan\alpha}{y_i + \tan\alpha * x} dx \\
 f_2(x) &= \frac{1}{T_0(x)} * \frac{dT_0(x)}{dx} = 0 \\
 f_3(x) &= D(x) = 2y_i + 2\tan\alpha * x \\
 f_4(x) &= \frac{dF_D(x)}{dx} = 0 \\
 f_5(x) &= \frac{1}{\dot{m}} * \frac{d\dot{m}}{dx} = 0
 \end{aligned} \tag{96}$$

Todos os potenciais-chave foram calculados com êxito em relação à variável independente do escoamento unidimensional  $x$  e o cálculo do número de Mach pode então ser realizado a partir da integração da equação (83) através do método de Runge-Kutta de quarta ordem apresentado anteriormente. O número de Mach obtido para este escoamento apresenta a seguinte forma:

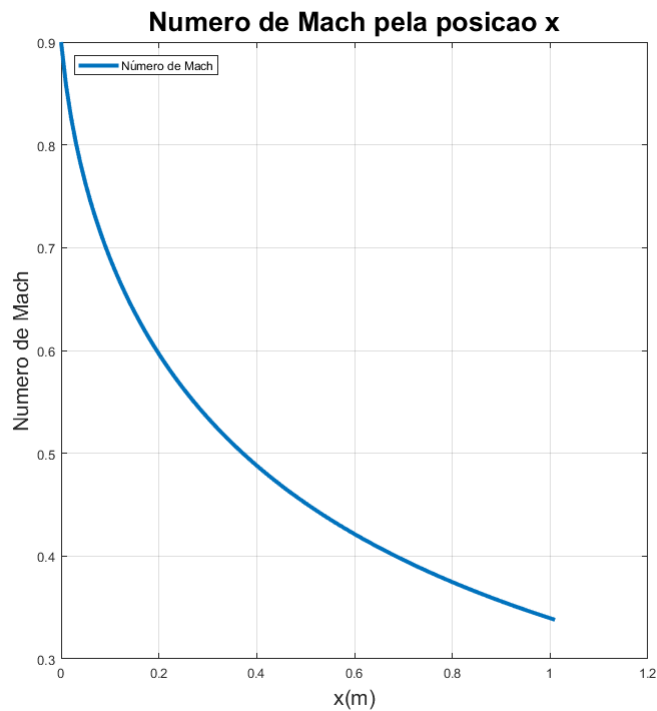


Figura 5-2 Número de Mach ao longo do escoamento

#### 5.1.4 Conclusões

O comportamento do difusor subsônico foi representado pelo programa com êxito, apresentando com sucesso a relação inversamente proporcional entre o aumento de área com a redução no número de Mach. Não foram realizadas análises para as demais propriedades deste problema devido ao seu caráter extremamente simplificado.

### 5.2 PROBLEMA 2: PROBLEMA 12.2 PROPOSTO POR OOSTHUIZEN E CARSCALLEN (1994)

Este problema propõe uma análise de um pequeno bocal repartida em 3 casos separados, possibilitando uma comparação de como o escoamento se comporta quando submetido à diferentes efeitos. Os 3 diferentes cenários permitem observar a importância do estudo de escoamentos generalizados. A desconsideração de algum dos efeitos que atuam sobre o escoamento impõe mudanças significativas aos resultados obtidos, que durante um processo de dimensionamento de um bocal poderia incorrer em falhas e prejuízos econômicos.

#### 5.2.1 Enunciado

Ar escoar através de um bocal axisimétrico entrando com um número de Mach  $M = 1,2$ , temperatura estática de  $400^{\circ}\text{C}$  e pressão estática de  $30\text{kPa}$ . A entrada do bocal possui diâmetro de 3cm e sua saída de 6cm. O comprimento do bocal é de 9cm. A parede do bocal é paralela ao eixo de escoamento em sua saída. O diâmetro do bocal varia conforme um polinômio de segunda ordem e apresenta o seguinte formato:

$$D(x) = 0,03 + \frac{2}{3}x - 3.704x^2 \quad (97)$$

Considerar os seguintes casos:

1. O escoamento é considerado adiabático e sem atrito;

2. O escoamento no bocal é considerado adiabático e o fator de atrito pode ser assumido como  $f = 0,005$ ;
3. A temperatura de estagnação do escoamento decai linearmente em 150K e o fator de atrito pode novamente ser considerado como  $f = 0,005$ .

### 5.2.2 Análise do problema

Este problema possibilita a comparação entre os 3 casos sob diferentes influências de fatores externos. Todos os potenciais-chave podem ser facilmente estabelecidos em relação à variável independente  $x$ . Seguindo o polinômio proposto no enunciado, o diâmetro do bocal apresenta o seguinte formato:

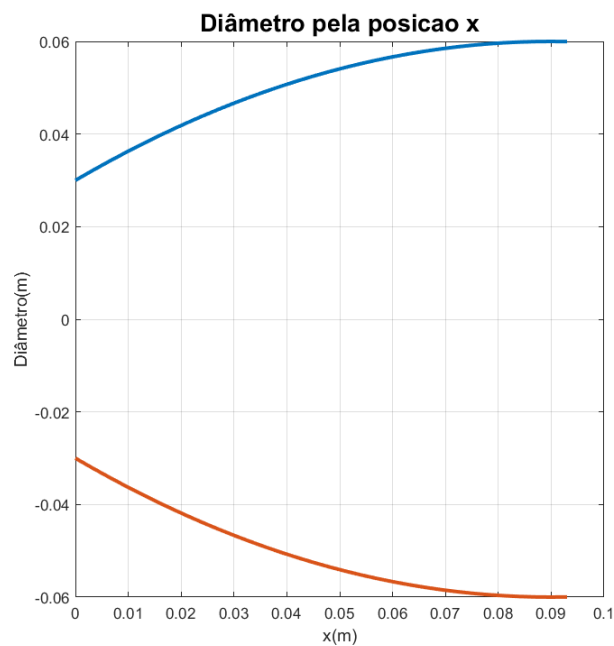


Figura 5-3 Formato do bocal analisado

Os potenciais-chave apresentam diferentes formas para os 3 casos. Os potenciais que são idênticos para os 3 casos são:

$$f_1(x) = \frac{1}{A(x)} * \frac{dA(x)}{dx} = \frac{2}{D(x)} \left( \frac{2}{3} - 7.408x \right)$$

$$f_3(x) = D(x) = 0,03 + \frac{2}{3}x - 3.704x^2$$

$$f_4(x) = \frac{dF_D(x)}{dx} = 0$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\dot{m}} * \frac{d\dot{m}}{dx} = 0$$

A diferença no fator de atrito considerado terá interação direta com o potencial-chave  $f_3$ . O potencial-chave  $f_2$  tem o seguinte formato para os 3 casos:

$$\text{Caso A: } f_2(x) = 0$$

$$\text{Caso B: } f_2(x) = 0 \tag{99}$$

$$\text{Caso C: } f_2(x) = T_{0inicial} + \frac{\Delta T_0}{L} x$$

Com os potenciais-chave representados para os 3 casos em relação à variável independente  $x$ , a rotina de simulação proposta neste trabalho pode ser implementada com êxito novamente.

Os resultados obtidos são apresentados a seguir:

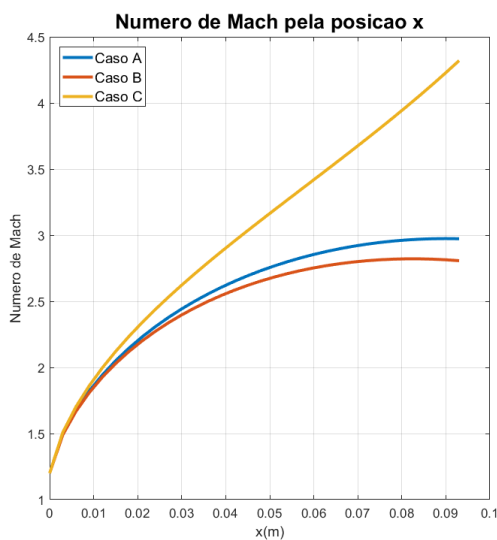


Figura 5-4 Número de Mach para o Problema 2

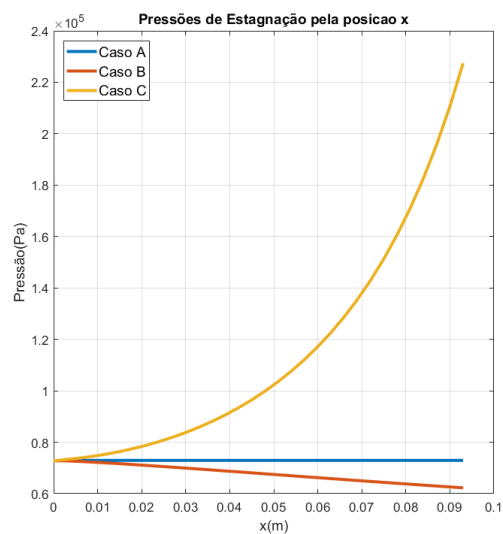


Figura 5-5 Pressões de estagnação para o problema 2

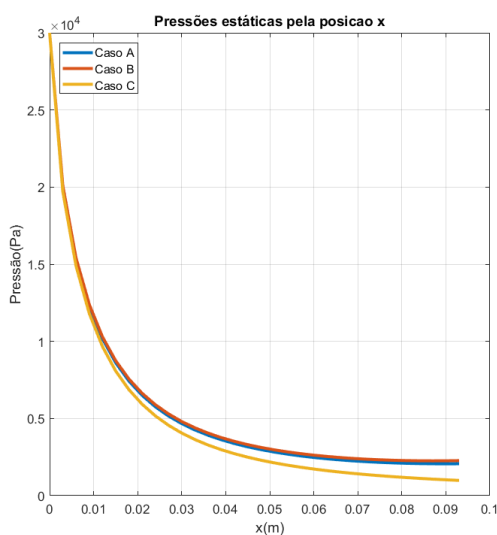


Figura 5-6 Pressões estáticas para o problema 2

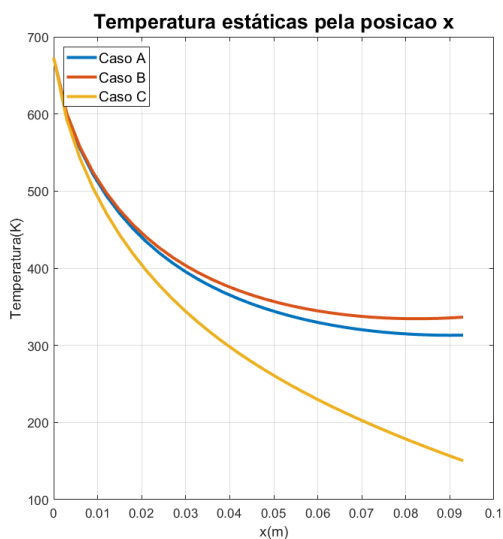


Figura 5-7 Temperaturas estáticas para o problema 2

Tabela 3 Resultados do problema 2

	Início	Caso A	Caso B	Caso C
Número de Mach	1.20	2.97	2.82	4.14
Temperatura de estagnação	867.0 K	867.0 K	867.0 K	722.0 K
Temperatura estática	673.2 K	313.3 K	334.9 K	163.0 K
Pressão estática	30000.0 Pa	2067.5 Pa	2255.0 Pa	1071.0 Pa
Pressão de estagnação	72749.0 Pa	72930.0 Pa	62951.0 Pa	195790.0 Pa
Velocidade de saída	624.1 m/s	1054.7 m/s	1033.9 m/s	1059.7 m/s



### 5.2.3 Análise dos Resultados

A complexidade incremental dos casos possibilitou comparar a influência dos efeitos externos que atuam sobre o escoamento. No caso A, o aumento da área no bocal supersônico incorreu em um aumento no número de Mach simultâneo a uma redução na temperatura estática e na pressão estática, conforme o esperado. A adição do atrito do escoamento com a parede dos bocais entre os casos B e A, incorreu em uma queda no número de Mach e uma redução na pressão de estagnação, decorrente da variação na entropia do sistema e irreversibilidades associadas ao atrito, mesmo com a dimensão reduzida do bocal. A troca de calor representada no Caso C incorre em mudanças ainda maiores em relação ao observado no caso B. O número de Mach obtido foi significativamente maior e a pressão de estagnação aumentou de maneira abrupta como pode ser observado na figura 5.5.

## 5.3 PROBLEMA 3: PROBLEMA 6.6 - HODGE (1995)

Seguindo a metodologia proposta de aumento incremental na complexidade do problema estudado, este problema apresenta simultaneamente incremento na vazão mássica, variação na temperatura de estagnação, mudança de área e onda de choque. Este problema será estudado mais a fundo em relação aos casos anteriores que se apresentaram como uma boa ferramenta didática para o estudo de escoamentos generalizados unidimensionais.

### 5.3.1 Enunciado

Ar entra num duto com número de Mach de 2,0, pressão de estagnação de 200kPa e temperatura de estagnação de 1000K. A geometria do duto tem 2 metros de comprimento e é composta por duas seções geometricamente distintas, cada uma com um metro de comprimento. A seção inicial possui diâmetro constante de 0,2m e a seção posterior possui um formato senoidal

com diâmetro inicial de 0,2m e diâmetro final de 0,4m. A temperatura de estagnação varia linearmente de 1000K a 600K entre a entrada e a saída e o fluxo de massa varia do mesmo modo, de tal forma que o fluxo de massa na saída é 1,15 vezes maior do que na entrada. Uma onda de choque ocorre a 1,5 metros da entrada. O fator de atrito é constante ao longo do duto e igual a 0,005.

### 5.3.2 Hipóteses adotadas

Para a resolução deste problema, são adotadas as mesmas hipóteses do desenvolvimento das equações da seção 4. O escoamento é considerado em regime permanente e plenamente desenvolvido. O ar é considerado um gás perfeito, com  $k$  constante.

A variação da temperatura de estagnação e da vazão de massa é considerada linear ao longo do tudo.

### 5.3.3 Equacionamento do problema

#### a. Diâmetro do duto

O diâmetro do duto pode ser separado em duas funções, sendo elas:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & 0 \leq x \leq 1 \\ & D(x) = D_0 \end{aligned} \tag{100}$$

$$\text{iii.} \quad 1 \leq x$$

$$D(x) = \frac{D_0 + D_f}{2} + \frac{D_0 - D_f}{2} \cos(\pi(x - L_1)) \tag{101}$$

Onde  $L_1 = 1m$ , que equivale ao comprimento desta seção. Graficamente, o diâmetro pode ser observado na o gráfico:

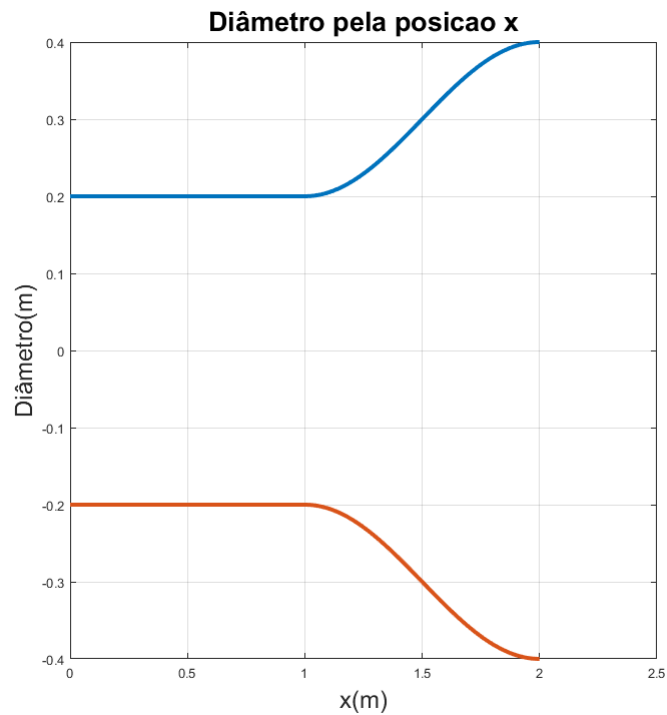


Figura 5-8 Diâmetro do duto pela posição

b. Área das seções

De maneira análoga, a área do duto pode ser dividida em duas seções, cada uma com uma função para o diâmetro distinta e sendo a área:  $A(x) =$

$$\pi * \frac{D(x)^2}{4}$$

A área do escoamento, fica:

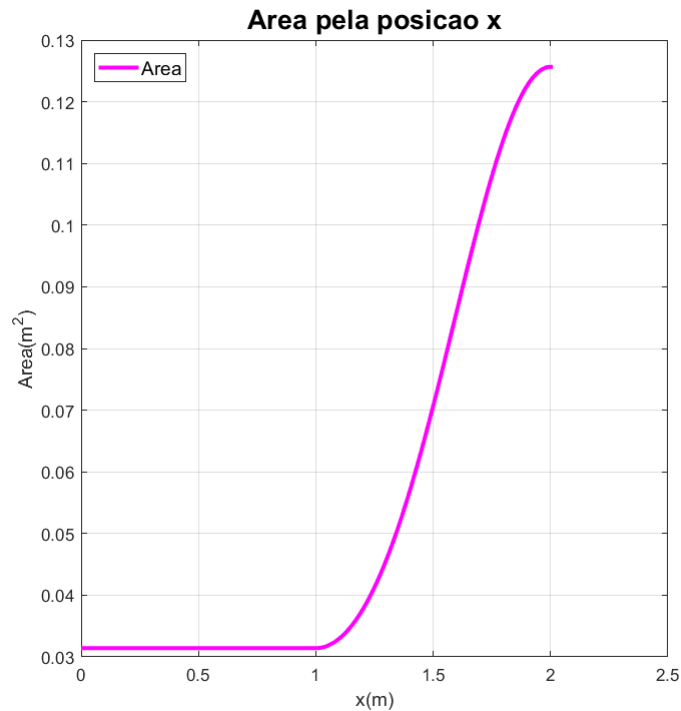


Figura 5-9 Área do duto ao longo do escoamento

c. Temperatura de estagnação

Como a variação da temperatura de estagnação ao longo do duto pode ser aproximada por uma função linear, ela pode ser escrita como:

$$T_0(x) = T_{0i} + \frac{T_{0F} - T_{0i}}{L} x \quad (102)$$

Sendo os índices i e F, para início e final, respectivamente.

d. Fluxo de massa

O valor absoluto da vazão mássica não é essencial para a resolução do problema, entretanto a razão entre valores das vazões mássicas ao longo do duto o é. É conhecido que a vazão mássica de saída é 1,15x maior do que a inicial. Para efeito de equacionamento vazão mássica inicial será considerada como 1 e a final como 1,15. Como a variação do fluxo de massa ao longo do duto pode ser aproximada por uma função linear, ela pode ser escrita como:

$$\dot{m}(x) = \dot{m}_i + \frac{\dot{m}_F - \dot{m}_i}{L} x \quad (103)$$

Sendo os índices i e F, para início e final, respectivamente.

Graficamente, esta distribuição é representada por:

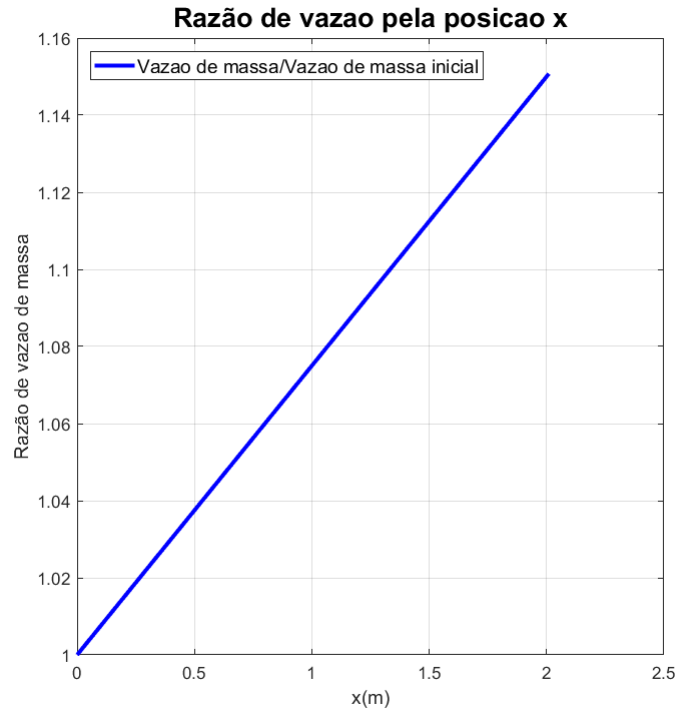


Figura 5-10 Razão da vazão mássica ao longo de x

Estas equações e suas derivadas são suficientes para equacionar os potenciais independentes e prosseguir com o método proposto na seção anterior. Para este escoamento, em particular, são obtidos os seguintes potenciais:

$$\begin{aligned} \text{i. } & 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) &= \frac{1}{A(x)} * \frac{dA(x)}{dx} = 0 \\ f_3(x) &= D(x) = D_0 \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } & 1 \leq x \\ f_1(x) &= \frac{1}{A(x)} * \frac{dA(x)}{dx} = \frac{2 * \pi * \frac{D_0 - D_f}{2} * \text{sen}(\pi(x - L_1))}{\frac{D_0 + D_f}{2} + \frac{D_0 - D_f}{2} \cos(\pi(x - L_1))} \\ &= 0.2 * \pi * \frac{\text{sen}(\pi(x - 1))}{0.3 - 0.1 \cos(\pi(x - 1))} \\ f_3(x) &= D(x) = \frac{D_0 + D_f}{2} + \frac{D_0 - D_f}{2} \cos(\pi(x - L_1)) = 0.3 - 0.1 \cos(\pi(x - 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } & \forall x \\ f_2(x) &= \frac{1}{T_0(x)} * \frac{dT_0(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{T_{0i} * L}{T_{0F} - T_{0i}} + x} \end{aligned}$$

$$f_4(x) = \frac{dF_D(x)}{dx} = 0$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\dot{m}} * \frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{1}{\frac{\dot{m}_i * L}{\dot{m}_F - \dot{m}_i} + x}$$

Com os potenciais independentes calculados, foi possível calcular o número de Mach ao longo do eixo x e posteriormente, através de etapas iterativas, calcular as funções e temperaturas para o escoamento conforme os gráficos abaixo:

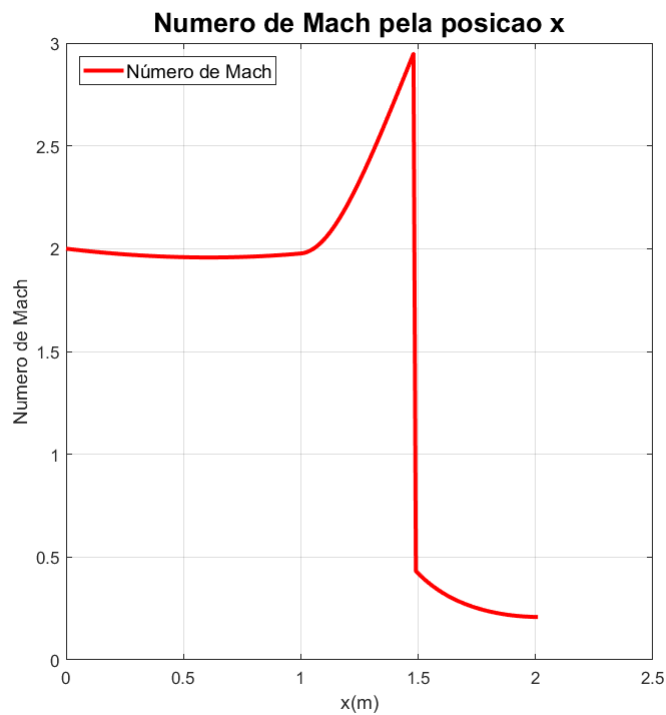


Figura 5-11 Numero de Mach ao longo do escoamento

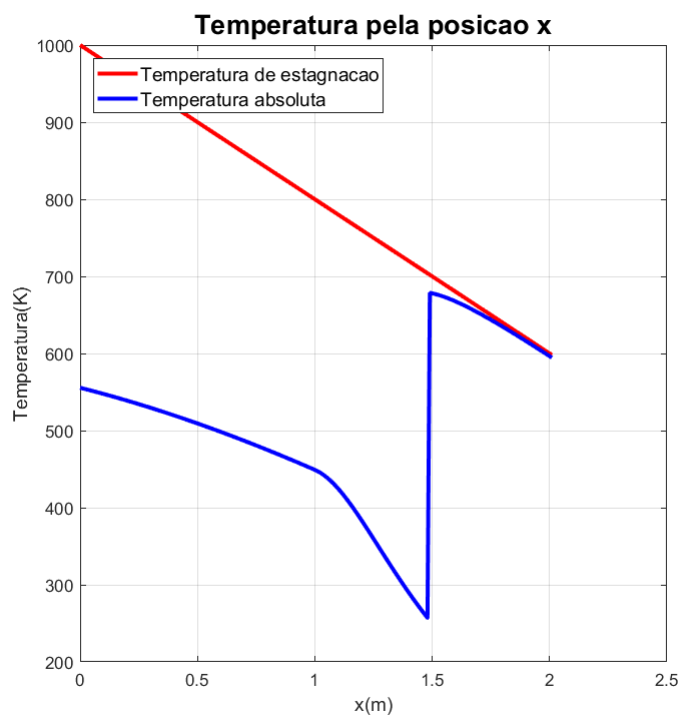


Figura 5-12 Temperaturas estáticas ao longo do escoamento

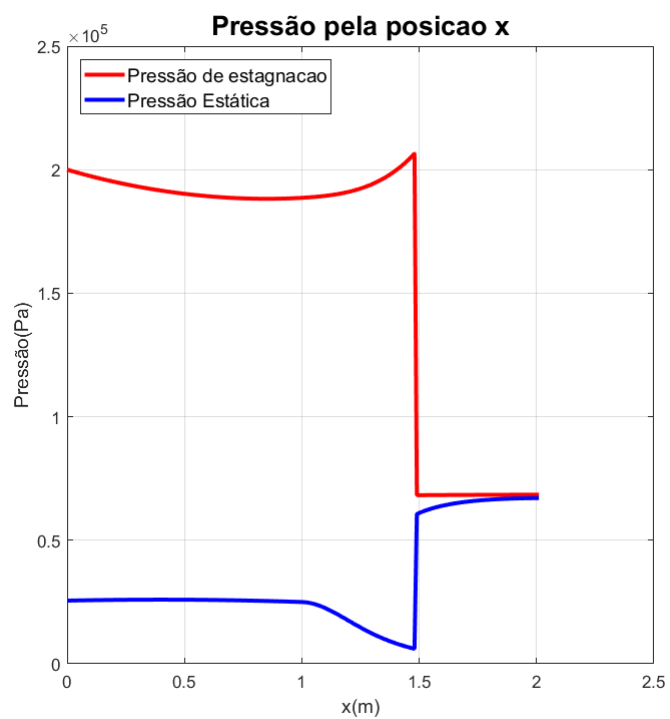


Figura 5-13 Pressões estáticas ao longo do escoamento

#### 5.3.4 Análise de Resultados

Neste estudo múltiplos efeitos atuaram simultaneamente sobre o problema e a abordagem proposta neste trabalho tornando possível a obtenção de resultados coerentes com o esperado para diferentes situações.

Como observado, no primeiro trecho aonde  $0 \leq x \leq 1m$ , não há variação de área do duto e a variação no número de Mach é mais sutil. A partir deste trecho o número de Mach aumenta significativamente com a nova geometria do duto. Por fim, quando  $x = 1,5m$ , a onda de choque incorre em mudanças significativas nas características do escoamento e ao final o número de Mach é pequeno o suficiente para a temperatura e pressão estáticas convergirem para seus pares de estagnação.

#### 5.4 AVALIAÇÃO DO MODELO

O modelo de escoamento quase unidimensional é substancialmente mais simples do que técnicas mais recentes de simulação numérica de fluidos, ignorando efeitos de turbulência mais complexos. Este modelo, entretanto, possibilita de maneira clara, a análise de diferentes efeitos que ocorrem simultaneamente no escoamento, atingindo resultados semelhantes aos principais livros-texto do tema.



## 6. CONCLUSÕES

Em cursos de graduação, o estudo de escoamentos levando em conta efeitos da compressibilidade muitas vezes não recebe a devida importância, ou então é apresentado de maneira introdutória. Em geral, são apresentados efeitos isolados atuando sobre uma seção de escoamento, sejam eles efeitos de atrito, troca de calor, variação de área, entre outros. Esta metodologia dificulta uma visão global do estudante sobre interação entre estes efeitos e relações de dominância entre eles sobre as principais propriedades do sistema. Alguns efeitos típicos do sistema compressível, como ondas de choque, podem ser apresentados de maneira mais tangível a partir da visualização de gráficos de pressão e temperatura, por exemplo, ao longo de um bocal.

Nos exemplos resolvidos ao longo deste trabalho, o equacionamento desenvolvido com base em autores clássicos (Shapiro, 1954; Zucrow, 1976 e Hodge, 1995), se mostra robusto o suficiente e, com sucesso, simula complexos escoamentos unidimensionais a partir de condições iniciais e potenciais-chave do escoamento conhecidos.

Ainda que a dedução do modelo compressível unidimensional possa fugir do escopo de um curso de graduação, este modelo pode ser facilmente implementado no formato de um programa em linguagem de simulação simples, uma vez que sua simulação se alicerça em rotinas numéricas com métodos integrativos relativamente simples. A simulação, por parte de alunos e professores, de um escoamento através de diferentes geometrias, utilizando condições de entrada diferentes se mais prática e visual, tornando possível a ilustração de problemas resolvidos em sala de aula, em linha com metodologias de ensino mais recentes, com maior enfoque prático. O efeito de bloqueio, por exemplo, pode ser facilmente ilustrado por um sistema simples com um bocal convergente. No último exemplo resolvido, da seção 5.3, é evidente a relação de dominância da variação de área do bocal em relação à ocorrência de atrito sobre o escoamento. Esta conclusão é evidente

a partir da seleção de uma geometria com diâmetro inicialmente constante que passa a divergir.

Conforme mencionado ao longo do trabalho, o modelo apresenta limitações sendo necessária a introdução da posição da onda de choque no bocal e de um maior detalhamento sobre a troca de calor como condição de contorno, por exemplo. Para casos complexos da indústria aeroespacial e bélica, por exemplo, no qual o estudo de escoamentos compressíveis ganha importância softwares de CFD conseguem resolver problemas com maior complexidade. Historicamente, entretanto, este modelo teve aplicações com bons resultados na década de 80 na simulação de vedações de filmes de gases pela NASA, conforme ilustrado no trabalho de Zuk (1974).

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DE PAIVA, G. V., “Análise e Simulação Numérica de um Escoamento Compressível Unidimensional Generalizado” - Universidade de São Paulo – 2009
- HODGE, B. K., “Compressible Fluid Dynamics: With Personal Computer Applications/Book and Disk” – Prentice Hall College Div. – 1995
- HODGE, B. K., “Using MathCad for Generalized One-Dimensional Compressible Flow in an Introductory Compressible Flow Course” - Mississippi State University – 1999
- OOSTHUIZEN, P.; CARSCALLEN, W., “Compressible Fluid Flow” – McGraw-Hill International Editions – 1994
- SHAPIRO, A. H., “The dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow” – The Ronald Press Company – 1954
- YANG, Z., “Numerical Simulation of incompressible and compressible flow” - University of Sheffield – 1989
- YOUNG, F. M.; SIMON, W. E., “A One-Dimensional Combined-change Model for Compressible Flow” - Lamar University - 1993.
- ZUCKER, R. D., “Fundamentals of Gas Dynamics” – John Wiley & Sons – 2002
- ZUCROW, M., HOFFMAN, J. “Gas Dynamics Volume I” – Purdue University – 1976
- ZUK, J.; SMITH, P., Computer Program for Quasi-One-Dimensional Compressible Flow with Area Change and Friction – Application to Gas Film Seals – Lewis Research Center – 1974